T O P O L O G I A
WPPT I, sem. letni

EGZAMIN POPRAWKOWY
ROZWIĄZANIA

Wrocław, 23 czerwca 2004

ZADANIE 1.
Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Czy zbiór $\{x \in X : \exists_{y \in X}\ d(x, y) > 1\}$ musi być otwarty? Odpowiedź uzasadnij.

ROZWIĄZANIE: Tak. Zbiór ten można zapisać jako

$$\bigcup_{y \in X} \{x : d(x, y) > 1\} = \bigcup_{y \in X} \left(\overline{K}(y, 1)\right)^c .$$

Dopełnienia kul domkniętych są zbiorami otwartymi, a dowolna suma zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.

ZADANIE 2.
a) Niech $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem w przestrzeni metrycznej zupełnej (X, d) spełniającym warunek

$$\lim_{n \to \infty} d(a_n, a_{n+1}) = 0.$$

Czy ciąg ten musi być zbieżny?

ROZWIĄZANIE: Nie. Niech na przykład $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Wiadomo, że $a_n \to \infty$, więc w przestrzeni zupełnej $\mathbb{R}$ ciąg ten jest rozbieżny, mimo że

$$d(a_n, a_{n+1}) = |a_{n+1} - a_n| = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

b) To samo pytanie przy warunku

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(a_n, a_{n+1}) < \infty.$$

ROZWIĄZANIE: A, tu sytuacja się zmienia. Odpowiedź jest TAK. Niech $n < m$. Z wielokrotnego złożenia warunku trójkąta mamy

$$d(a_n, a_m) \le \sum_{k=n}^{m-1} d(a_k, a_{k+1}) \le \sum_{k=n}^{\infty} d(a_k, a_{k+1}),$$

a to, jako ,,ogon" szeregu zbieżnego, dąży po n do zera. Zatem $d(a_n, a_m) < \epsilon$, o ile tylko n (a więc i m) są większe od pewnego n_0. Zatem nasz ciąg jest podstawowy, a z zupełności przetrzeni – zbieżny.

ZADANIE 3.
Podaj przykład funkcji ciągłej $f : X \to Y$ z przestrzeni metrycznej zupełnej X w przestrzeń metryczną zupełną Y, takiej że obraz pewnego zbioru ograniczonego w X nie jest ograniczony w Y.

ROZWIĄZANIE: Najprostszy przykład, który można było podać, to funkcja tożsamościowa $f(n) = n$ na zbiorze liczb naturalnych $\mathbb{N}_D$ z metryką dyskretną w zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$ ze zwykłą metryką. Każda przetrzeń dyskretna jest ograniczona i zupełna (tylko ciągi stałe są podstawowe) i każda funkcja na niej jest ciągła. Natomiast obraz całości jest nieograniczony (bo oczywiście $\mathbb{N}$ ze zwykłą metryką jest zbiorem nieograniczonym).
UWAGA: Sztuczka nie uda się na żadnym podzbiorze prostej (ani $\mathbb{R}^n$) z metryką euklidesową. Wynika to z faktu, że w przestrzeniach tych zbiór ograniczony jest całkowicie ograniczony, a zatem jego domknięcie w przestrzeni zupełnej – zwarte. Wtedy obraz przez funkcję ciągłą tego domknięcia będzie zwarty, a więc ograniczony, tym bardziej obraz danego zbioru bez domknięcia.

ZADANIE 4.
Oblicz granicę ciągu rekurencyjnego

$a_1 = \ln 2,$

$a_{n+1} = \frac{1}{a_n+2}.$

ROZWIĄZANIE: Rozważmy funkcję $f(x) = \frac{1}{x+2}$. Oczywiście $x \geq 0 \implies f(x) > 0$, zatem f można obciąć do półprostej $X = [0, \infty)$ i będziemy mieli $f : X \to X$. Taka przestrzeń X jest oczywiście zupełna. Obliczmy pochodną: $f'(x) = -\frac{1}{(x+2)^2}$, a to dla $x \geq 0$ jest mniejsze równe od $\frac{1}{4}$. A więc f jest Lipschitzowska ze stałą $\frac{1}{4}$, czyli zbliżająca. Ponieważ punkt startowy $\ln 2$ jest w X, więc nasz ciąg, jako ciąg iteracji, będzie zbieżny do jedynego punktu stałego. Aby go znaleźć rozwiązujemy równanie $x = \frac{1}{x+2}$. Wychodzą dwa rozwiązania: $x_0 = \sqrt{2} - 1$ i $x_1 = -\sqrt{2} - 1$. Tylko x_0 jet nieujemne, czyli należy do $X = [0, \infty)$, więc nasz ciąg zbiega do niego. Odpowiedź: szukana ganica, to $\sqrt{2} - 1$.
UWAGA: na całym $\mathbb{R}$ odwzorowanie f nie jest ani dobrze określone (w -2), ani zbliżające – w otoczeniu punktu -2 pochodna jest duża, zresztą wychodzą dwa punkty stałe. Zatem ograniczenie dziedziny jest koniecznością.

ZADANIE 5.
Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem zbieżnym do punktu a w dowolnej przestrzeni metrycznej. Udowodnij, że zbiór $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$ jest zwarty.

ROZWIĄZANIE: Weźmy dowolne pokrycie $\mathcal{U}$ zbioru A. Jakiś element pokrycia, nazwijmy go U_0, zawiera granicę a, a zatem (jako otoczenie granicy) i wszystkie wyrazy ciągu (a_n) o indeksach powyżej pewnego n_0. Został do pokrycia zbiór skończony $\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}\}$. Każdy z tych a_k należy do jakiegoś elementu pokrycia, nazwijmy go U_k ($k = 1, 2, \ldots n_0$). Zatem całość jest pokryta przez podpokrycie skończone złożone ze zbiorów $U_0, U_1, U_2, \ldots U_{n_0}$.

ZADANIE 6.
Niech $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem funkcji rzeczywistych nieujemnych i ciągłych określonych na przestrzeni metrycznej X. Wykaż, że funkcja

$$f(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$$

jest I klasy Baire'a.

ROZWIĄZANIE: Trzeba pokazać, że f jest granicą punktową ciągu funkcji ciągłych. Zdefiniujmy $g_n(x) = \inf\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\}$. Jako infimum skończenie wielu funkcji ciągłych, jest to funkcja ciągła, funkcje g_n maleją (bowiem $g_{n+1}(x) = \inf\{g_n(x), f_{n+1}(x)\} \leq g_n(x)$) i są ograniczone od dołu przez zero. Zatem funkcje te

zbiegają punktowo do swojej granicy (a zarazem infimum) h. Wystarczy pokazać, że $h(x) = f(x)$ dla każdego x. Tu można było powołać się na znajomość odpowiedniego faktu z analizy: infimum zbioru jest równe infimum infimów podzbiorów skończonych. Dla kompletności przytaczam jednak szczegółowy dowód dalszej części: Mamy: $f(x) \le h_n(x)$ dla każdego n, stąd $f(x) \le \lim_n h_n(x) = h(x)$. Z drugiej strony, dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje n takie, że $f_n(x) < f(x) + \epsilon$. Ponieważ dla $m \ge n$ mamy $h_m(x) \le f_n(x)$, więc $h_m(x) \le f(x) + \epsilon$, stąd w granicy po m, $h(x) \le f(x) + \epsilon$. Ponieważ ϵ był dowolny, to $h(x) \le f(x)$. To kończy dowód.
UWAGA: Oczywiście nie można liczyć na to, że f będzie to granicą ciągu (f_n), bo nie każdy ciąg funkcji nieujemnych jest w ogóle zbieżny punktowo, a tym bardziej do swojego infimum.

ZADANIE 7.
Wykaż, że w zbiorze $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (wszystkich funkcji rzeczywistych zmiennej rzeczywistej) z topologią produktową funkcje spełniające warunek $\inf_{x\in\mathbb{R}} f(x) < 0$ tworzą zbiór otwarty.

ROZWIĄZANIE: Warunek $\inf_{x\in\mathbb{R}} f(x) < 0$ można równoważnie zapisać po prostu tak: $\exists_{x\in\mathbb{R}}\ f(x) < 0$. Czyli badany zbiór funkcji to $\{f : \exists_{x\in\mathbb{R}}\ f(x) < 0\}$, czyli $\bigcup_x \{f : f(x) \in (-\infty, 0)\}$. Zbiór pod sumą (dla ustalonego x) jest bazowy w topologii Tychonowa: przedział $(-\infty, 0)$ jest otwarty, a warunek należenia $f(x)$ do tego zbioru jest narzucony tylko na jedną (a więc skończenie wiele) ustaloną wartość zmiennej. Suma zbiorów bazowych jest otwarta.

Tomasz Downarowicz